

四川省对口升学(职教高考) 数学历年真题汇编

(2022-2024)

扫描下方二维码。关注“[溢学职教升学通](#)”企业微信，了解更多资讯



关注“[溢学职教升学通](#)”微信公众号，索取更多学习资料！有你想要的！

资讯、政策、考纲、分数线、... 扫码关注，立马拥有！

Yixu [抖音](#)“[溢学职教升学通](#)”推送最新资讯 Promotion



四川省 2022 年普通高校对口招生统一考试

数学 参考答案

一、选择题：本大题共 15 小题，每小题 4 分，共 60 分.在每小题列出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

【1 题答案】

【答案】B

【2 题答案】

【答案】A

【3 题答案】

【答案】A

【4 题答案】

【答案】D

【5 题答案】

【答案】C

【6 题答案】

【答案】A

【7 题答案】

【答案】C

【8 题答案】

【答案】D

【9 题答案】

【答案】A

【10 题答案】

【答案】D

【11 题答案】

【答案】C

【12 题答案】

【答案】B

【13 题答案】

【答案】A

溢学职教升学通

Yixue Vocational Education for Promotion

【14 题答案】

【答案】C

【15 题答案】

【答案】B

第II卷（共 90 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

【16 题答案】

【答案】1

【17 题答案】

【答案】580

【18 题答案】

【答案】5

【19 题答案】

【答案】9

【20 题答案】

【答案】 $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答时应写出文字说明、演算步骤或主要证明过程.

【21 题答案】

【答案】(1) $a=4, b=6$

(2) 答案见解析. Yixue Vocational Education for Promotion

【22 题答案】

【答案】(1) 证明见解析

(2) $-6+3^{n+1} \cdot 2^{1-n} + \frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n$

【23 题答案】

【答案】(1) 证明见详解

(2) $\sqrt{10}$

【24 题答案】

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) 证明见详解

【25 题答案】

【答案】(1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1, f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

(2) 单调递减，理由见解析

【26 题答案】

【答案】(1) $mx + ny - 9 = 0$

(2) $2x + y - 9 = 0$



溢学职教升学通

Yixue Vocational Education for Promotion

四川省 2023 年普通高校对口招生统一考试

数学 参考答案

一、选择题：共 15 小题，每小题 4 分，共 60 分. 在每小题列出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1. 设集合 $M = \{1, 2\}$, $N = \{0, 1, 2, 3\}$, 则 $M \cup N = (\quad)$

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据并集的概念及运算可求解.

【详解】因为集合 $M = \{1, 2\}$, $N = \{0, 1, 2, 3\}$,

所以 $M \cup N = \{0, 1, 2, 3\}$.

故选：D

2. 函数 $f(x) = \sqrt{x-2} + 3^x - 5$ 的定义域是 $(\quad)$

- A. $(2, +\infty)$ C. $(-2, +\infty)$ D. $[-2, +\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据偶次根式的被开方数为非负数，列不等式可求解.

【详解】由 $x-2 \geq 0$ 得， $x \geq 2$.

故函数 $f(x) = \sqrt{x-2} + 3^x - 5$ 的定义域是 $[2, +\infty)$.

故选：B

3. 已知平面向量 $\vec{a} = (4, 3)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 则 $2\vec{a} - \vec{b} = (\quad)$

- A. $(3, 1)$ B. $(6, 5)$ C. $(8, 6)$ D. $(10, 7)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据向量线性运算的坐标表示可求解.

【详解】因为向量 $\vec{a} = (4, 3)$, $\vec{b} = (2, 1)$,

所以 $2\vec{a} - \vec{b} = 2(4, 3) - (2, 1) = (8, 6) - (2, 1) = (6, 5)$

故选：B

4. 过点 $(2, 7)$ 且倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线的方程是 ()

A. $y = -x + 5$

B. $y = x + 5$

C. $y = -x + 9$

D. $y = x + 9$

【答案】C

【解析】

【分析】根据点斜式方程即可求解.

【详解】由直线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$,

可得该直线的斜率为 $k = -1$, 又因为该直线经过点 $(2, 7)$

所以由点斜式可得该直线的方程为 $y - 7 = -(x - 2)$

即 $y = -x + 9$

故选：C.

5. $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} =$

A. 0

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据三角函数的诱导公式计算.

【详解】 $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

所以, $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$

故选：D.

6. 函数 $y = \sin x \cos x + \pi$ 的最小正周期是 ()

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. π

D. 2π

【答案】C

【解析】

【分析】按三角函数倍角公式将函数化简，再分析.

【详解】 $y = \sin x \cos x + \pi = \frac{1}{2} \sin 2x + \pi$

而正弦函数 $\sin 2x$ 的最小正周期为 π

故函数 $y = \sin x \cos x + \pi$ 的最小正周期为 π .

故选：C.

7. 不等式 $|x-1| < 3$ 的解集是 ()

A. $(-4, 2)$

B. $(-3, -1)$

C. $(-2, 4)$

D. $(1, 3)$

【答案】C

【解析】

【分析】先将绝对值去掉，再计算不等式.

【详解】将不等式 $|x-1| < 3$ 的绝对值去掉，可得

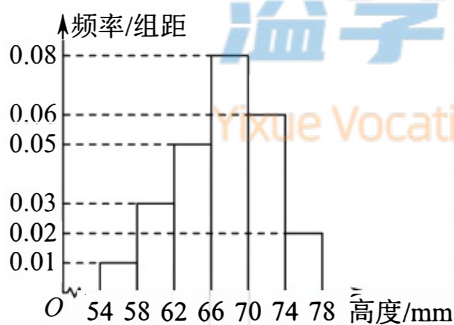
$$-3 < x-1 < 3$$

$$\text{则 } -2 < x < 4$$

故选：C.

8. 某同学随机抽取 100 株麦苗测出其高度(单位: mm), 将所得结果分为 6 组: $[54, 58)$, $[58, 62)$, $[62, 66)$,

$[66, 70)$, $[70, 74)$, $[74, 78]$, 并绘制出如图所示的频率分布直方图, 则高度不低于 70mm 的株数为 ()



A. 28

B. 32

C. 36

D. 40

【答案】B

【解析】

【分析】由频率分布直方图求得高度不低于 70mm 内的频率，从而可得高度不低于 70mm 的频数，据此可求解.

【详解】由频率分布直方图可知，高度不低于 70mm 内的频率为

$$(0.06 + 0.02) \times 4 = 0.32,$$

所以抽取 100 株麦苗中高度不低于 70mm 的株数为

$$0.32 \times 100 = 32 \text{ (株)}.$$

故选: B

9. 双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程是 ()

A. $y = \pm \frac{3}{5}x$

B. $y = \pm \frac{4}{5}x$

C. $y = \pm \frac{5}{3}x$

D. $y = \pm \frac{5}{4}x$

【答案】A

【解析】

【分析】由双曲线方程可知: $a=5, b=3$, 且焦点在 x 轴上, 将之代入渐近线方程 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 即可.

【详解】由双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 可知, $a=5, b=3$, 且焦点在 x 轴上,

所以渐近线方程是 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{5}x$.

故选: A

10. 设 $10^m = 4$, $10^n = 25$, 其中 m, n 是正实数, 则 $m+n =$ (

A. 2

B. 4

C. 10

D. 25

【答案】A

【解析】

【分析】先将 m 和 n 转换成对数, 利用对数的性质计算.

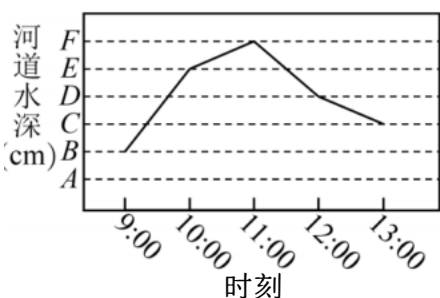
【详解】 $10^m = 4$, 所以 $m = \lg 4$.

$$10^n = 25, \text{ 所以 } n = \lg 25$$

$$m+n = \lg 4 + \lg 25 = \lg 100 = \lg 10^2 = 2$$

故选: A.

11. 某水文监测站对一河道某处的水深每小时进行一次记录, 结果如图所示. B, C, D, E 为线段 AF 的等分点. 已知 9 点时河道水深为 160cm, 从 11 点到 12 点河道水深减少了 10%, 则在 11 点时河道水深为 ()



- A. 164cm B. 168cm C. 180cm D. 200cm

【答案】D

【解析】

【分析】按照线段等分线条件设定各时段水位，再计算.

【详解】根据题意， B, C, D, E 为线段 AF 的等分点，令每个等分线之间水深为 a cm.

则 9 点水深 160，11 点水深为 $160 + 4a$ ，12 点水位为 $160 + 2a$

根据题意，从 11 点到 12 点河道水深减少了 10%，则

$$\frac{160 + 2a - (160 + 4a)}{160 + 4a} \times 100\% = -10\%$$

故 $a = 10$

所以 11 点水位为 $160 + 4a = 200$ cm

故选：D.

12. 设 a, b, c, d 是实数，则“ a, b, c, d 成等差数列”是“ $a + d = b + c$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据“若 a, b, c, d 成等差数列，则 $a + d = b + c$ ”是真命题；“若 $a + d = b + c$ ，则 a, b, c, d 成等差数列”是假命题，并结合充要条件的定义可判断.

【详解】若 a, b, c, d 成等差数列，则 $b - a = d - c$ ，即 $a + d = b + c$.

故“若 a, b, c, d 成等差数列，则 $a + d = b + c$ ”是真命题.

“ a, b, c, d 成等差数列”是“ $a + d = b + c$ ”的充分条件：

取 $a = 1, d = -1, b = c = 0$ ，满足 $a + d = b + c$ ，但 a, b, c, d 不是等差数列.

故“若 $a + d = b + c$ ，则 a, b, c, d 成等差数列”是假命题.

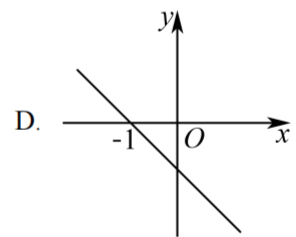
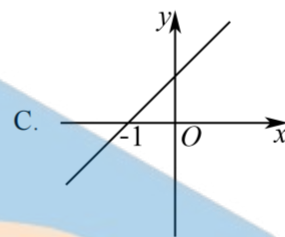
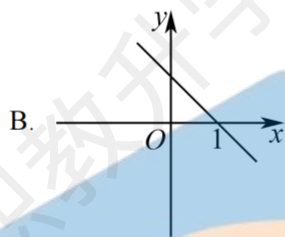
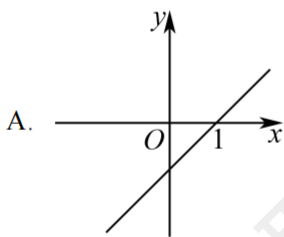
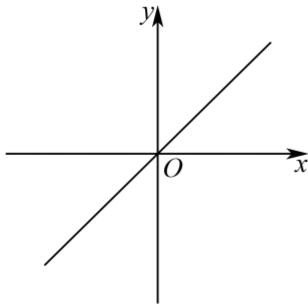
“ a, b, c, d 成等差数列”不是“ $a + d = b + c$ ”的必要条件.



综上所述，“ a, b, c, d 成等差数列”是“ $a+d=b+c$ ”的充分不必要条件.

故选：A

13. 已知函数 $y=f(x)$ 的部分图象如下图所示，则函数 $y=-f(x-1)$ 的部分图象是（ ）



【答案】B

【解析】

【分析】根据函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 关于 x 轴对称，并将 $y=-f(x)$ 向右平移 1 个单位得到函数 $y=-f(x-1)$ 提图像，据此可判断.

【详解】先将函数 $y=f(x)$ 关于 x 轴对称得函数 $y=-f(x)$ ，再将 $y=-f(x)$ 向右平移 1 个单位可得函数 $y=-f(x-1)$ 的图像，据此分析，B 选项符合题意.

故选：B

14. 设 α, β 是两个不同的平面， m, n 是两条不同的直线，则下列命题中的真命题是（ ）

A. 如果 $m//\alpha, n//\beta, m//n$ ，那么 $\alpha//\beta$

B. 如果 $m//n, n\subset\alpha$ ，那么 $m//\alpha$

C. 如果 $\alpha\perp\beta, m\subset\alpha, n\subset\beta$ ，那么 $m\perp n$

D. 如果 $m\perp\alpha, m\subset\beta$ ，那么 $\alpha\perp\beta$

【答案】D

【解析】

【分析】由立体几何中直线和平面的平行、垂直的性质和判定逐项分析判断即可.

【详解】A 选项，如果 $m//\alpha, n//\beta, m//n$ ，那么 $\alpha//\beta$ 或 α 和 β 相交，A 错误，

B 选项，如果 $m//n, n\subset\alpha$ ，但若 $m\subset\alpha$ ，那么 m 在 α 平面上，不平行，B 错误，

C 选项, 如果 $\alpha \perp \beta$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, m 和 n 两直线不一定垂直, C 错误,

D 选项, 如果 $m \perp \alpha$, $m \subset \beta$, 由面面垂直的判定定理可知 $\alpha \perp \beta$, D 正确.

故选: D.

15. 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = \frac{a \cdot 5^x + a - 2}{5^x + 1}$ 是奇函数, 且 $f(p) > \frac{12}{13}$, 则实数 p 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{12}{13}\right)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $\left(\frac{12}{13}, +\infty\right)$ D. $(2, +\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】由题知 $f(0) = 0$, 从而可求得 $f(x) = \frac{5^x - 1}{5^x + 1}$ 根据 $f(p) > \frac{12}{13}$ 化简可得 $5^p > 25$, 据此可求解.

【详解】因为函数 $f(x) = \frac{a \cdot 5^x + a - 2}{5^x + 1}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数,

$$\text{所以 } f(0) = \frac{a \cdot 5^0 + a - 2}{5^0 + 1} = 0,$$

$$\text{解: } a = 1, \quad f(x) = \frac{5^x - 1}{5^x + 1}$$

$$\text{由 } f(p) > \frac{12}{13} \text{ 得, } f(p) = \frac{5^p - 1}{5^p + 1} > \frac{12}{13},$$

$$\text{化简并整理得 } 5^p > 5^2 = 25,$$

$$\text{解得 } p > 2.$$

故选: D

第II卷 (共 90 分)

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分.

16. $(2x+1)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为 (用数字作答).

【答案】60

【解析】

【分析】根据二项式定理计算.

【详解】根据二项式定理可知, $(a+b)^n$ 的通项 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

所以 $(2x+1)^6$ 的通项 $T_{k+1} = C_6^k (2x)^{6-k} 1^k = C_6^k 2^{6-k} x^{6-k}$

当 $k=4$ 时, $T_5 = C_6^4 \cdot 2^2 \cdot x^2 = 60x^2$

故答案为: 60

17. 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=3$, $\vec{a} \cdot \vec{b}=1$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a}-2\vec{b})=$

【答案】7

【解析】

【分析】根据平面向量数量积运算求解.

【详解】 $\vec{a} \cdot (\vec{a}-2\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 - 2 = 7$

故答案为: 7.

18. 抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-6=0$ 距离的最小值是.

【答案】 $\frac{14}{15}$

【解析】

【分析】按照点到直线距离公式计算.

【详解】设抛物线上该点为 (x_0, y_0) , 则 $y_0 = -x_0^2$

该点到直线 $4x+3y-6=0$ 的距离

$$d = \frac{|4x_0 + 3y_0 - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4x_0 - 3x_0^2 - 6|}{5} = \frac{\left| 3\left(x_0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{14}{3} \right|}{5} = \frac{3\left(x_0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}}{5}$$

故, 当 $x_0 = \frac{2}{3}$, $d = \frac{14}{15}$

故答案为: $\frac{14}{15}$

19. 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ 在 $[-\theta, \theta]$ 上单调递增, 则 θ 的最大值是.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】

【分析】因为函数可化为 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 所以最小正周期为 2π , 由函数 $f(x)$ 在 $[-\theta, \theta]$ 上单调

递增可得 $0 < 2\theta \leq \pi$, 即 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 令 $t = x + \frac{\pi}{4}$, $x \in [-\theta, \theta]$, 则 $t \in \left[\frac{\pi}{4} - \theta, \frac{\pi}{4} + \theta\right]$ 根据正弦函数的

单调性可得 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} - \theta < \frac{\pi}{4} + \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 据此可求解.

【详解】因为函数 $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

又函数 $f(x)$ 在 $[-\theta, \theta]$ 上单调递增,

所以 $0 < 2\theta \leq \pi$, 即 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

令 $t = x + \frac{\pi}{4}$ $[-\theta, \theta]$, 则 $t \in \left[\frac{\pi}{4} - \theta, \frac{\pi}{4} + \theta \right]$,

由题知, $\left[\frac{\pi}{4} - \theta, \frac{\pi}{4} + \theta \right] \subseteq \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right] (k \in \mathbb{Z})$

又 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

故令 $k=0$ 得, $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} - \theta < \frac{\pi}{4} + \theta \leq \frac{\pi}{2}$

解得 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$

所以 θ 的最大值是 $\frac{\pi}{4}$

故答案为: $\frac{\pi}{4}$

20. 甲、乙两人玩猜硬币游戏, 乙负责抛硬币, 甲在乙每次抛前进行猜测. 甲用数列 $\{a_n\}$ 记录自己每次的猜测情况, 若猜测第 k 次抛硬币出现正面记 $a_k = 1$, 出现反面记 $a_k = -1$; 乙用数列 $\{b_n\}$ 记录每次抛硬币后实际出现的正反面结果, 当第 k 次抛硬币出现正面记 $b_k = 1$, 出现反面记 $b_k = -1$. 他们进行 50 次游戏后, 乙统计并计算出 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_5 b_5 = 26$, 则甲猜对的次数为

【答案】38

【解析】

【分析】由题知 $a_k b_k$ 的值有 1 和 -1 两种, 若 $a_k b_k = 1$, 表示甲猜对, 若 $a_k b_k = -1$, 表示甲猜错, 设甲猜对的次数为 n , 则猜错的次数为 $50 - n$, 据此可求解.

【详解】由题知 $a_k b_k$ 的值有 1 和 -1 两种, 若 $a_k b_k = 1$, 表示甲猜对, 若 $a_k b_k = -1$, 表示甲猜错,

设甲猜对的次数为 n ，则猜错的次数为 $50-n$ ，由题知

$$(50-n) \times (-1) + n = 26,$$

解得 $n = 38$.

所以甲猜对的次数为 38.

故答案为：38

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

21. 某高校羽毛球社团招募了 6 名新成员，其中 2 名来自体育学院，现从这 6 名新成员中随机选择 4 人参加校运动会比赛.

(1) 设 M 为事件“选出的 4 人中恰有 2 人来自体育学院”，求事件 M 发生的概率；

(2) 设 ξ 为选出的 4 人中来自体育学院的人数，求 ξ 的概率分布.

$$\frac{2}{5}$$

(2) 答案见详解

【解析】

【分析】(1) 根据古典概型的计算公式求解；

(2) 由题知， ξ 的可能取值为 0, 1, 2，根据 ξ 的可能取值分别求对应的概率，再写出分布列.

【小问 1 详解】

从 6 名新成员中随机选择 4 人参加校运动会比赛，共有 C_6^4 个基本事件，其中事件 M 共包含 $C_2^2 C_4^2$ 个基本事件，根据古典概型计算公式可得，

$$P(M) = \frac{C_2^2 C_4^2}{C_6^4} = \frac{2}{5}$$

【小问 2 详解】

ξ 的可能取值为 0, 1, 2.

$$P(\xi = 0) = \frac{C_2^0 C_4^4}{C_6^4} = \frac{1}{15},$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_2^1 C_4^3}{C_6^4} = \frac{8}{15},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_2^2 C_4^2}{C_6^4} = \frac{2}{5}$$

所以 ξ 的概率分布为：

$$\xi \quad 0 \quad 2$$

$$P \quad \frac{1}{15} \quad \frac{8}{15} \quad \frac{2}{5}$$

22. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 -10 的等差数列, 且 $a_4 + 3$, a_6 , $a_9 - 2$ 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_n 的最小值.

【答案】(1) $a_n = 4n - 14$

(2) -18

【解析】

【分析】(1) 由题知 $a_6^2 = (a_4 + 3)(a_9 - 2)$, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 根据通项公式可求得 $d = 4$, 据此可求解;

(2) 由 (1) 可得 $S_n = 2(n-3)^2 - 18$, 据此可求解.

【小问 1 详解】

由题知, $a_6^2 = (a_4 + 3)(a_9 - 2)$,

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则有 $(-10 + 5d)^2 = (-10 + 3d + 3)(-10 + 8d - 2)$

化简整理得 $d^2 - 8d + 16 = 0$,

解得 $d = 4$

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -10 + 4(n-1) = 4n - 14$;

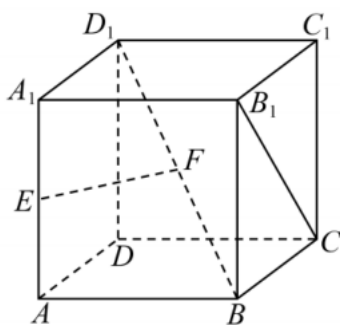
【小问 2 详解】

由 (1) 知, $\{a_n\}$ 是以首项 $a_1 = -10$, 公差 $d = 4$ 的等差数列,

所以 $S_n = -10n + \frac{n(n-1)}{2} \times 4 = 2n^2 - 12n = 2(n-3)^2 - 18$,

所以当 $n = 3$ 时, S_n 有最小值 -18 .

23. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 AA_1 的中点, F 为 BD_1 的中点.



- (1) 证明: $EF \parallel$ 平面 $ABCD$;
 (2) 求异面直线 EF 与 B_1C 所成角的大小.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 60°

【解析】

【分析】(1) 作平面垂线, 找到平面内与直线 EF 平行的直线.

(2) 把两条异面直线成的角转化到一个三角形中求解.

【小问 1 详解】

过 F 点作平面 $ABCD$ 的垂线, 与平面 $ABCD$ 交点为 G , 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交点为 G_1 ,

$\because$ 在三角形 DD_1B 中, $FG \parallel DD_1$, 且 F 为 BD_1 的中点,

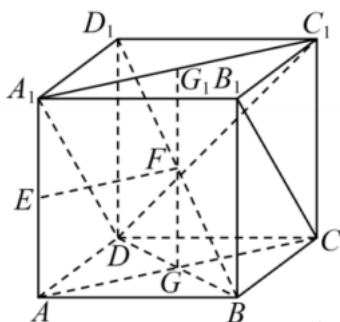
$\therefore G$ 为 BD 的中点, 是 AC 与 BD 的交点,

且 $FG = \frac{1}{2}DD_1 = \frac{1}{2}GG_1$, 故 F 为 GG_1 的中点,

而, 在平面 AA_1G_1G 内, E 为 AA_1 的中点,

所以, 故在平面 AA_1G_1G 内, $EF \parallel AG$, EF 不在平面 $ABCD$ 内,

而 AG 在平面 $ABCD$ 内, 所以, $EF \parallel$ 平面 $ABCD$



【小问 2 详解】

$\because$ 在平面 AA_1C_1C 内, AA_1 和 CC_1 都是垂线且相等,

$\therefore AA_1C_1C$ 为矩形, 故 $AC \parallel A_1C_1$,

由第 1 小问可知, $EF \parallel AG$,

$\therefore EF \parallel AC \parallel A_1C_1$,

而 $B_1C \parallel A_1D$,

$\therefore B_1C \parallel A_1D$ 异面直线 EF 与 B_1C 所成角 $= \angle DA_1C_1$,

三角形 DA_1C_1 是等边三角形, 故 $\angle DA_1C_1 = 60^\circ$,

即异面直线 EF 与 B_1C 所成角为 60° .

24. 已知 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $a \sin 2B = \sqrt{3}b \sin (B+C)$

(1) 求 B 的大小;

(2) 若 $c = \sqrt{3}(a-b)$, 证明: $\triangle ABC$ 为直角三角形.

【答案】(1) $B = \frac{\pi}{6}$

(2) 证明见详解

【解析】

【分析】(1) 由二倍角公式和诱导公式将已知转化为 $2a \sin B \cos B = \sqrt{3}b \sin A$, 再利用正弦定理可得

$2ab \cos B = \sqrt{3}ba$, 化简得 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 从而求解;

(2) 利用余弦定理和已知条件可得 $a = b$ 或 $a = 2b$, 当 $a = b$ 时, $c = \sqrt{3}(a-b) = 0$, 不符合题意; 当 $a = 2b$ 时, $c = \sqrt{3}(a-b) = \sqrt{3}b$, 满足 $a^2 = b^2 + c^2$, 据此得证.

【小问 1 详解】

由 $a \sin 2B = \sqrt{3}b \sin (B+C)$ 得

$$2a \sin B \cos B = \sqrt{3}b \sin (\pi - A)$$

$$\therefore 2a \sin B \cos B = \sqrt{3}b \sin A$$

由正弦定理可得 $2ab \cos B = \sqrt{3}ba$,

即 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $B \in (0, \pi)$,

所以 $B = \frac{\pi}{6}$;

【小问 2 详解】

由余弦定理可得

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

将 $c = \sqrt{3}(a-b)$, $B = \frac{\pi}{6}$ 代入可得

$$b^2 = a^2 + [\sqrt{3}(a-b)]^2 - 2a[\sqrt{3}(a-b)] \cos \frac{\pi}{6}$$

化简整理得 $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$,

故 $a = b$ 或 $a = 2b$.

当 $a = b$ 时, $c = \sqrt{3}(a-b) = 0$, 不符合题意, 舍去;

当 $a = 2b$ 时, $c = \sqrt{3}(a-b) = \sqrt{3}b$, 此时满足 $a^2 = b^2 + c^2$,

所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

25. 设圆 $C: (x-x_0)^2 + y^2 = r^2$ ($x_0 < 0, r > 0$) 与直线 $x = 1$ 相切, 且 C 被直线 $y = x + 4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{7}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 C 与 $y = m|x| + 3$ 有且只有 3 个公共点, 求实数 m 的值.

【答案】(1) $(x+2)^2 + y^2 = 9$

(2) $m = -\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】(1) 由圆与直线 $x = 1$ 相切, 可得 $1 - x_0 = r$, 由圆被直线 $y = x + 4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{7}$, 可得

$$\left(\frac{|x_0 + 4|}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{7})^2 = r^2, \text{ 联立可求解;}$$

(2) 分 $m = 0$, $m > 0$, $m < 0$ 讨论, 根据图像可知, 当 $m < 0$ 且射线 $y = mx + 3, x \geq 0$ 与圆相切时符合题意, 据此可求解.

【小问 1 详解】

由圆 $C: (x-x_0)^2 + y^2 = r^2$ ($x_0 < 0, r > 0$) 知, 圆心坐标为 $(x_0, 0)$.

因为圆 C : 与直线 $x = 1$ 相切, 且 $x_0 < 0, r > 0$,

所以 $|x_0 - 1| = r$ ，即 $1 - x_0 = r$ ——①

因为圆心 $(x_0, 0)$ 到直线 $y = x + 4$ 的距离 $d = \frac{|x_0 + 4|}{\sqrt{2}}$ 由题知

$$\left(\frac{|x_0 + 4|}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{7})^2 = r^2 \text{ ——②}$$

由①②得

$$x_0^2 - 12x_0 - 28 = 0, \text{ 且 } x_0 < 0,$$

故 $x_0 = -2$ ，从而 $r = 3$ 。

所以 C 的方程为 $(x + 2)^2 + y^2 = 9$ ；

【小问 2 详解】

①当 $m = 0$ 时， $y = 3$ 与圆 $(x + 2)^2 + y^2 = 9$ 只有一个交点；

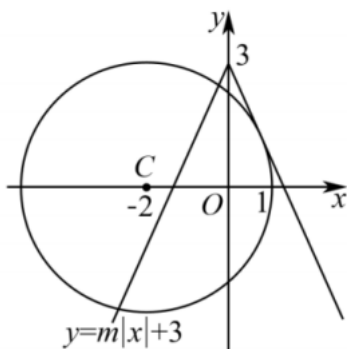
②当 $m > 0$ 时， $y = m|x| + 3 \geq 3$ ， $y = m|x| + 3$ 与圆 $(x + 2)^2 + y^2 = 9$ 没有交点；

③当 $m < 0$ 时， $y = m|x| + 3 = \begin{cases} mx + 3, & x \geq 0 \\ -mx + 3, & x < 0 \end{cases}$

由题意，当 $y = mx + 3, x \geq 0$ 与圆相切时， $y = -mx + 3, x < 0$ 与圆相交，如图所示，满足题意，

所以圆心 $(-2, 0)$ 到直线 $y = mx + 3, x \geq 0$ 的距离 $d = \frac{|-2m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$ ，

解得 $m = -\frac{12}{5}$ 或 $m = 0$ (舍去)



26. 已知函数 $f(x) = x^2 \log_3 \frac{m+1}{9m} - 2x \log_3 \frac{m}{m+1} + \log_3 \frac{(m+1)^3}{m^3}$

(1) 若 $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ ，求 $f(1)$ 的最大值；

(2) 若对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x) > 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) 4 (2) $\left\{ m \mid 0 < m < \frac{1}{26} \right\}$

【解析】

【分析】(1) 直接代入计算，再分析.

(2) 先设置参数，求出参数范围，再求 m 范围.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} f(1) &= \log_3 \frac{m+1}{9m} - 2 \log_3 \frac{m}{m+1} + \log_3 \frac{(m+1)^3}{m^3} \\ &= \log_3 \frac{m+1}{9m} + 2 \log_3 \frac{m+1}{m} + 3 \log_3 \frac{m+1}{m} \\ &= \log_3 \frac{m+1}{m} - \log_3 9 + 2 \log_3 \frac{m+1}{m} + 3 \log_3 \frac{m+1}{m} \\ &= 6 \log_3 \frac{m+1}{m} - 2 = 6 \log_3 \left(1 + \frac{1}{m} \right) - 2 \end{aligned}$$

$$\because \frac{1}{2} \leq m \leq 1$$

$$\therefore 1 \leq \frac{1}{m} \leq 2, \text{ 即 } 2 \leq 1 + \frac{1}{m} \leq 3$$

根据对数函数的性质，底数大于 1 时，函数为增函数.

即， $\log_3 x$ 为增函数.

所以，当 $1 + \frac{1}{m} = 3$ 时， $f(1)$ 最大.

$$f(1) = 6 \log_3 3 - 2 = 4.$$

【小问 2 详解】

根据题意， $m \neq 0$ ， -1

$$\therefore \log_3 \frac{m+1}{m} = \log_3 \left(1 + \frac{1}{m} \right) = a$$

$$\text{则, } f(x) = x^2 \log_3 \frac{m+1}{9m} - 2x \log_3 \frac{m}{m+1} + \log_3 \frac{(m+1)^3}{m^3}$$

$$= x^2 (a - 2) + 2xa + 3a$$

$\therefore$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) > 0$ 恒成立.

$\therefore a-2>0$ 且 $\Delta<0$

当 $a-2>0$ 时, $\log_3 \frac{m+1}{m} - 2 > 0$ $0 < m < \frac{1}{8}$ (1)

当 $\Delta = (2a)^2 - 4 \cdot (a-2) \cdot 3a = -8a^2 + 24a < 0$, 得到 $a < 0$ 或 $a > 3$

令 $a < 0$, 即 $\log_3 \frac{m+1}{m} = \log_3(1 + \frac{1}{m}) < 0$, 则 $0 < 1 + \frac{1}{m} < 1$, 则 $m < -1$ (不符合式 (1))

令 $a > 3$, 即 $\log_3 \frac{m+1}{m} = \log_3(1 + \frac{1}{m}) > 3$, 且 $0 < 1 + \frac{1}{m}$, $m < \frac{1}{26}$ (3).

根据式 (1) (2) (3), 可知, $\left\{ m \middle| 0 < m < \frac{1}{26} \right\}$

溢学职教升学通

Yixue Vocational Education for Promotion

四川省 2024 年普通高校对口招生统一考试

数学 参考答案

一、选择题：本大题共 15 小题，每小题 4 分，共 60 分.在每小题列出的四个备选项中，只有一个是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{0, 1, 2\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{-2, -1, 0\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用集合的运算求交集即可.

【详解】集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{0, 1, 2\}$,

则 $M \cap N = \{0, 1, 2\}$;

故选: C.

2. 函数 $f(x) = 3^{x-2} - \log_3(x-3)$ 的定义域是 ()

- A. $(-3, +\infty)$ C. $(3, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据指数函数定义域为 $\mathbb{R}$ 与对数函数真数大于零可求定义域.

【详解】函数 $f(x) = 3^{x-2} - \log_3(x-3)$ 有意义,

则 $\begin{cases} x-2 \in \mathbb{R} \\ x-3 > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > 3 \end{cases}$ 即 $x > 3$,

则函数 $f(x) = 3^{x-2} - \log_3(x-3)$ 的定义域是 $(3, +\infty)$;

故选: C.

3. $\cos 30^\circ + \cos 90^\circ =$ ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据特殊角的三角函数值即可得解.

【详解】 $\cos 30^\circ + \cos 90^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

故选：D

4. 已知平面向量 $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (-2, -1)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】利用向量内积的坐标表示即可得解.

【详解】因为 $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (-2, -1)$,

所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-2) - 3 \times (-1) = -1$.

故选：B.

5. 不等式 $1 < |2-x| < 2$ 的解集为 ()

A. $(0, 4)$

B. $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$

C. $(1, 3)$

D. $(0, 1) \cup (3, 4)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用绝对值不等式的解法求解即可.

【详解】不等式 $1 < |2-x| < 2$ 可化为, $1 < |2-x|$ 与 $|2-x| < 2$,

$1 < |2-x|$ 可化为 $2-x > 1$ 或 $2-x < -1$, 解得 $x < 1$ 或 $x > 3$,

$|2-x| < 2$ 可化为 $|x-2| < 2$, 即 $-2 < x-2 < 2$, 解得 $0 < x < 4$,

综上, 不等式的解为 $0 < x < 1$ 或 $3 < x < 4$,

则不等式 $1 < |2-x| < 2$ 的解集为 $(0, 1) \cup (3, 4)$;

故选：D.

6. 过点 $(1, 1)$ 且与直线 $x-2y=0$ 垂直的直线的方程是 ()

A. $2x+y-3=0$

B. $2x+y-1=0$

C. $2x-y-3=0$

D. $2x-y-1=0$

【答案】A

【解析】

【分析】设与直线 $x-2y=0$ 垂直的直线的方程为 $2x+y+c=0$ ，再将点 $(1,1)$ 代入求值即可。

【详解】直线 $x-2y=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，则与其垂直的直线斜率为 -2 ，

设与直线 $x-2y=0$ 垂直的直线的方程为 $2x+y+c=0$ ，

将点 $(1,1)$ 代入得 $2 \times 1 + 1 + c = 0$ ，解得 $c = -3$ ，

所以直线的方程为 $2x+y-3=0$ 。

故选：A。

7. $4\lg^2 2 + 2\lg 4\lg 25 + \lg^2 25 = (\quad)$

A. 1

B. 2

C. 4

D. 25

【答案】C

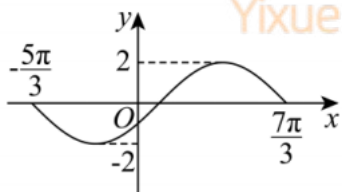
【解析】

【分析】利用完全平方公式和对数的基本运算性质求解。

【详解】 $4\lg^2 2 + 2\lg 4\lg 25 + \lg^2 25 = (2\lg 2)^2 + 4\lg 2\lg 25 + \lg^2 25$
 $= (2\lg 2 + \lg 25)^2 = (\lg 4 + \lg 25)^2 = [\lg(4 \times 25)]^2$
 $= 2^2 = 4$ 。

故选：C

8. 函数 $y = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示，其中 $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，则 $(\quad)$



A. $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

B. $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

C. $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

D. $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】首先根据图象求得函数的周期，进而求得 ω 的值，再由点 $\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right)$ 求得 φ 的值.

【详解】由图象可知， $T = \frac{7\pi}{3} - \left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 4\pi$,

所以 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 4\pi (\omega > 0)$, $\omega = \frac{1}{2}$,

所以 $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \varphi\right)$,

因为点 $\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right)$ 在函数图象上,

代入得 $2\sin\left(\frac{1}{2} \times \frac{7\pi}{3} + \varphi\right) = 0$,

即 $\frac{7\pi}{6} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $\varphi = -\frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以当 $k = 1$ 时, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$,

故函数的解析式为 $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

故选: A.

9. 已知椭圆 $\frac{x^2}{3m^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的左焦点为 $(-4, 0)$, 则 m 的值为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】直接利用椭圆的性质，转化求解即可得解.

【详解】因为椭圆 $\frac{x^2}{3m^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的左焦点为 $(-4, 0)$,

所以 $3m^2 - m^2 = 4^2$, 解得 $m = 2\sqrt{2}$,

故选: B.

10. 某保险公司为了解购买某险种的 1000 名投保人的出险次数情况，随机调查了其中 100 名投保人的出险

次数，得到如下表格：

出险次数	0	1	2	3	≥ 4
------	---	---	---	---	----------

投保人数	a	29	25	8	3
------	-----	----	----	---	---

则下列结论中正确的是（ ）

- A. 表中 a 的值为 25
- B. 调查的这 100 名投保人的出险次数的均值大于 1
- C. 购买该险种的 100 名投保人的出险次数是总体
- D. 估计购买该险种的所有投保人中，出险次数不低于 3 次的人数为 11

【答案】B

【解析】

【分析】由频数分布表的数据特征逐个判断即可.

【详解】由样本容量，可知 $a = 100 - 29 - 25 - 8 - 3 = 35$ ，故 A 错误；

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(0 \times 35 + 1 \times 29 + 2 \times 25 + 3 \times 8 + 4 \times 3) = 1.15 > 1,$$

故这 100 名投保人的出险次数的均值大于 1，故 B 正确；

由样本的概念可知，购买该险种的 100 名投保人的出险次数是样本，故 C 错误；

$$\frac{8+3}{100} \times 1000 = 110,$$

故购买该险种的所有投保人中，出险次数不低于 3 次的人数为 110，故 D 错误.

故选：B.

11. 已知 $a = 2^{0.2}$, $b = 3^{0.3}$, $c = 0.2^2$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）

- A. $a > b > c$
- B. $a > c > b$
- C. $b > a > c$
- D. $b > c > a$

【答案】C

【解析】

【分析】根据指数函数，幂函数的性质即可求解.

【详解】由题意得，因为幂函数 $y = x^{0.3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，

又指数函数 $y = 2^x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

所以 $3^{0.3} > 2^{0.3} > 2^{0.2} > 2^0 = 1$ ，又 $0.2^2 = 0.04 < 1$ ，

所以 $b > a > c$.

故选：C.

12. 设 $\alpha \in \mathbf{R}$ ，则“ $\tan \alpha = -1$ ”是“ $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ”的（ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用任意角的三角函数结合条件充分性与必要性进行判断即可.

【详解】设 $\alpha \in \mathbf{R}$ ，则“ $\tan \alpha = -1$ ”，则 $\alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ，充分性不成立；

$\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 则 $\tan \alpha = -1$ ，必要性成立；

则“ $\tan \alpha = -1$ ”是“ $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ”的必要不充分条件；

故选：B.

13. 一个温度为 $T_0^\circ\text{C}$ 的物体移入恒温 $a^\circ\text{C}$ 的室内， t 分钟后该物体的温度为 $T^\circ\text{C}$. 已知 T 与 t 的关系可以表示为 $T = a + (T_0 - a)e^{-kt}$ ，其中 $k > 0$ ，现将温度为 90°C 的该物体移入恒温 10°C 的室内，20 分钟后该物体的温度为 50°C ，则再过 20 分钟该物体的温度为（ ）

A. 10°C

C. 30°C

D. 40°C

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意可知当 $T_0 = 90^\circ\text{C}$, $a = 10^\circ\text{C}$, $t = 20$ 时， $T = 50^\circ\text{C}$ ，将其代入解析式 $T = a + (T_0 - a)e^{-kt}$ 中，得出 $e^{-20k} = \frac{1}{2}$ ，再令 $t = 40$ 代入求值即可.

【详解】根据题意可知当 $T_0 = 90^\circ\text{C}$, $a = 10^\circ\text{C}$, $t = 20$ 时， $T = 50^\circ\text{C}$ ，

代入 $T = a + (T_0 - a)e^{-kt}$ 中得， $50 = 10 + (90 - 10)e^{-kt}$ ，

整理得 $e^{-20k} = \frac{1}{2}$ ，再过 20 分钟，即 $t = 40$ 时，

该物体的温度为 $T = 10 + (90 - 10)e^{-40k} = 10 + 80(e^{-20k})^2 = 10 + 80 \times \frac{1}{4} = 30^\circ\text{C}$

故选：C.

14. 设 α, β, γ 是三个不同的平面， l, m 是两条不同的直线. 给出下列四个命题：（ ）

①若 $\alpha \parallel \gamma, \beta \parallel \gamma$ ，则 $\alpha \parallel \beta$

②若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha // \beta$.

③若 $l // \alpha, m // \beta, l // m$, 则 $\alpha // \beta$.

④若 $\alpha \cap \gamma = l, \beta \cap \gamma = m, l // m$, 则 $\alpha // \beta$.

其中正确命题的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】根据线面平行、面面平行以及面面垂直的性质分析求解.

【详解】①中若 $\alpha // \gamma, \beta // \gamma$, 根据面面平行的传递性可知 $\alpha // \beta$, 正确,

②中若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 α, β 有可能平行, 也有可能相交, 错误,

③中若 $l // \alpha, m // \beta, l // m$, 则 α, β 有可能平行, 也有可能相交, 即 l, m 平行于 α, β 的交线 n 时,

$l // \alpha, m // \beta, l // m$ 也成立, 错误,

④中若 $\alpha \cap \gamma = l, \beta \cap \gamma = m, l // m$, 则 α, β 有可能平行, 也有可能相交, 错误,

所以正确命题个数是 1 个,

故选: A.

15. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x-6) = f(x+6)$, 当 $-3 \leq x < 1$ 时, $f(x) = -x^2 - 2x$, 当 $1 \leq x < 9$ 时, $f(x) = x - 4$ 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2024) = ()$

A. 328

B. 332

C. 336

D. 340

【答案】D

【解析】

【分析】根据 $f(x-6) = f(x+6)$ 可知 $f(x)$ 的周期为 $T = 12$, 再根据解析式分别求出 $f(1), f(2), \cdots, f(12)$ 的值, 再根据周期函数的性质求值即可.

【详解】已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x-6) = f(x+6)$,

所以 $f(x)$ 的周期为 $T = 12$, 且当 $-3 \leq x < 1$ 时, $f(x) = -x^2 - 2x$,

当 $1 \leq x < 9$ 时, $f(x) = x - 4$, 所以 $f(1) = 1 - 4 = -3$,

$$f(2)=2-4=-2, f(3)=3-4=-1, f(4)=4-4=0,$$

$$f(5)=5-4=1, f(6)=6-4=2, f(7)=7-4=3,$$

$$f(8)=8-4=4, f(9)=f(9-12)=f(-3)=-(-3)^2-2\times(-3)=-3.$$

$$f(0)=f(10-12)=f(-2)=-(-2)^2-2\times(-2)=0.$$

$$f(11)=f(11-12)=f(-1)=-(-1)^2-2\times(-1)=1.$$

$$f(12)=f(12-12)=f(0)=-0^2-2\times 0=0,$$

$$\text{所以 } f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(12)$$

$$=-3-2-1+0+1+2+3+4-3+0+1+0=2,$$

$$\text{因为 } 2024\div 12=168\cdots 8,$$

$$\text{所以 } f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2024)$$

$$=168\times 2-3-2-1+0+1+2+3+4=340.$$

故选：D.

第 II 卷（共 90 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

16. 已知抛物线 $y^2=2px$ 过点 $(3,6)$ ，则 $p=$.

【答案】 6

【解析】

【分析】将点 $(3,6)$ 代入解析式，求出 p 即可.

【详解】将点 $(3,6)$ 代入抛物线 $y^2=2px$ ，

$$\text{则 } 36=6p, \quad p=6;$$

故答案为：6.

17. 若 $(2x+a)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 -320 ，则实数 $a=$ _

【答案】 -2

【解析】

【分析】根据二项式展开式的通项公式，令 x 的指数等于 2 求出 r 的值，再利用 x^2 的系数列出方程求出 a 的值.

【详解】 $(2x+a)^5$ 的二项展开式的通项为： $T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-r} a^r$,

令 $5-r=2$, 得 $r=3$,

$$\text{则 } C_5^3 \times 2^2 \times a^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times 4 \times a^3 = 40a^3 = -320,$$

解得 $a = -2$.

故答案为: -2 .

18. 某植物的快速生长期约有 10 天, 在此期间该植物每天结束时的高度都为前一天结束时的高度的 2 倍
已知在快速生长期的第 4 天结束时, 该植物的高度是 20 毫米, 那么它在第 7 天结束时的高度为_毫米.

【答案】160

【解析】

【分析】根据得出每天的高度为等比数列, 根据等比数列的性质即可得解.

【详解】由题意可知, 该植物在快速生长期每天结束时的高度构成一个公比为 2 的等比数列,

设等比数列为 a_n , 则 $a_4 = 20$,

$$\text{所以 } a_7 = a_4 q^3 = 20 \times 2^3 = 160 \text{ 毫米},$$

故答案为: 160.

19. 已知函数 $f(x) = (x+a) \ln \left(1 + \frac{b}{x+1} \right)$ 是偶函数, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $a-b =$ _____.

【答案】2

【解析】

【分析】利用对数函数的定义域结合函数奇偶性求出 a, b 即可.

【详解】函数 $f(x) = (x+a) \ln \left(1 + \frac{b}{x+1} \right)$ 是偶函数,

$$\text{则 } 1 + \frac{b}{x+1} > 0, \quad \frac{x+1+b}{x+1} > 0,$$

$$\text{则 } \begin{cases} x+1+b > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x > -b-1 \\ x > -1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x+1+b < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x < -b-1 \\ x < -1 \end{cases};$$

当 $b=0$ 时, $x \neq -1$, 此时定义域不关于原点对称, 不符合偶函数,

若 $b > 0$, 则 $-b-1 < -1$, 则有 $x > -1$ 或 $x < -b-1$, 无解, 不符合题意;

若 $b < 0$, 则 $-b-1 > -1$, 则 $x > -b-1$ 或 $x < -1$,

因为偶函数定义域关于原点对称, 则 $-b-1+(-1)=0$, 则 $b=-2$;

$$\text{则解析式为 } f(x) = (x+a) \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$\text{则 } f(x) = f(-x), \text{ 即 } (x+a) \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = (-x+a) \ln \left(\frac{-x-1}{-x+1} \right),$$

$$\text{即 } (x+a) \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = (-x+a) \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-1},$$

$$\text{则 } x+a = -(-x+a), \text{ 即 } x+a = x-a, \text{ 解得 } a=0;$$

$$\text{则 } a-b = 0 - (-2) = 2;$$

故答案为: 2.

20. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=1$, 则 $|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值是 _____.

【答案】 $2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】根据向量数量积运算律, $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{10+6\cos\theta}$, $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{10-6\cos\theta}$, 令 $t = \sqrt{10+6\cos\theta} + \sqrt{10-6\cos\theta}$, 对 t 平方求 t^2 的范围, 即可求得最大值.

【详解】因为 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=1$, 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ , $\theta \in [0, \pi]$.

$$\text{则 } |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} = \sqrt{10+}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} = \sqrt{10-6\cos\theta},$$

$$\text{令 } t = |\vec{a}+\vec{b}| + |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{10+6\cos\theta} + \sqrt{10-6\cos\theta}, t \geq 0.$$

$$\text{则 } t^2 = 20 + 2\sqrt{100-36\cos^2\theta},$$

$$\text{因为 } \cos^2\theta \in [0, 1], \text{ 所以 } 100-36\cos^2\theta \in [64, 100],$$

$$\text{所以 } t^2 \in [36, 40], \text{ 又因为 } t \geq 0,$$

$$\text{所以 } t \in [6, 2\sqrt{10}],$$

$$\text{所以 } |\vec{a}+\vec{b}| + |\vec{a}-\vec{b}| \text{ 的最大值是 } 2\sqrt{10},$$

故答案为: $2\sqrt{10}$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

21. 为弘扬中华优秀传统文化，某学校将开展传统文化知识竞赛.已知该学校的文学、朗诵、书画、戏曲 4 个社团的人数分别为 140,112,56,28，且每个社团的成员都只参加了 1 个社团.竞赛组委会拟采用分层抽样的方法从以上 4 个社团中抽取 12 名同学担任志愿者.

(1) 求应从这 4 个社团中分别抽取的志愿者人数；

(2) 若从抽取的 12 名志愿者中随机抽取 3 名担任竞赛分数统计员，求抽取的 3 名统计员中恰有 2 名来自同一社团的概率.

【答案】(1) 5；4；2；1.

(2) $\frac{32}{55}$

【解析】

【分析】(1) 先确定抽样比，再分别计算每层抽取的人数即可求得.

(2) 根据组合的应用分别计算出基本事件总数以及事件 A 中包含的基本事件数，再根据古典概型概率公式计算即可.

【小问 1 详解】

由题意，抽样比为 $\frac{12}{140+112+56+28} = \frac{1}{28}$ ，

所以 $\frac{\text{志愿者人数}}{140} = \frac{1}{28}$ ，

从朗诵社团抽取的志愿者人数为 $112 \times \frac{1}{28} = 4$ ；

从书画社团抽取的志愿者人数为 $56 \times \frac{1}{28} = 2$ ；

从戏曲社团抽取的志愿者人数为 $28 \times \frac{1}{28} = 1$ ；

综上所述，应从文学、朗诵、书画、戏曲 4 个社团中分别抽取的志愿者人数为 5，4，2，1.

【小问 2 详解】

由题意，从抽取的 12 名志愿者中随机抽取 3 名担任竞赛分数统计员，共有 C_{12}^3 种抽法；

记“抽取的 3 名统计员中恰有 2 名来自同一社团”为事件 A；

其中抽取的 3 名统计员中恰有 2 名来自文学社团的方法有 $C_5^2 C_7^1$ 种，

抽取的 3 名统计员中恰有 2 名来自朗诵社团的方法有 $C_4^2 C_8^1$ 种，

抽取的 3 名统计员中恰有 2 名来自书画社团的方法有 $C_2^2 C_{10}^1$ 种；

故抽取的 3 名统计员中恰有 2 名来自同一社团的方法共有 $C_5^2 C_7^1 + C_4^2 C_8^1 + C_2^2 C_{10}^1 = 128$ 种；

故抽取的 3 名统计员中恰有 2 名来自同一社团的概率为 $P(A) = \frac{128}{C_{12}^3} = \frac{32}{55}$.

22. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + A\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A = 1$.

(1) 求 A 的大小;

(2) 若 $c = b\cos A + \sqrt{3}a\sin B$, 证明: $\triangle ABC$ 为直角三角形.

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) 证明见详解

【解析】

【分析】(1) 根据二倍角的余弦公式, 诱导公式, 两角和与差的正弦公式即可求解.

(2) 根据余弦定理, 两角和与差的正弦公式即可求解.

【小问 1 详解】

由题意得, $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + A\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A - 1 = \cos^2 A + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A - 1 = 0$.

则 $2\cos^2 A + \sqrt{3}\sin 2A - 1 - 1 = 0 = \cos 2A + \sqrt{3}\sin 2A - 1 = 0$

即 $2\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2A\right) - 1 = 0$, 所以 $\frac{\pi}{6} + 2A = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 或 $\frac{\pi}{6} + 2A = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

解得 $A = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 或 $A = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

因为 A 是 $\triangle ABC$ 内角, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

由题意得, $b\cos A + \sqrt{3}a\sin B - c = b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \sqrt{3}a\sin B - c = 0$

则 $b^2 + c^2 - a^2 + 2\sqrt{3}ac\sin B - 2c^2 = 0$, 即 $b^2 = a^2 + c^2 - 2\sqrt{3}ac\sin B$

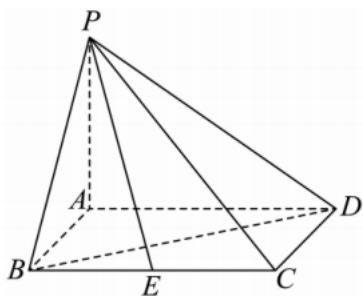
又由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, 则 $2\sqrt{3}ac\sin B = 2ac\cos B$. 即 $\sqrt{3}\sin B = \cos B$.

所以 $\sqrt{3}\sin B - \cos B = \sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ 且 $B = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

因为 B 是 $\triangle ABC$ 内角, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$, 由 (1) 知 $A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $C = \frac{\pi}{2}$

所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

23. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为长方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB = PA = 1$, $AD = \sqrt{2}$, E 为 BC 的中点.



(1) 证明: $PE \perp BD$;

(2) 求二面角 $P-BD-A$ 的正切值.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 作 DC 中点 G , 连接 EG , PG , 证明 $\triangle PEG$ 为直角三角形, 然后根据 $PE \perp EG$ 证明 $PE \perp BD$ 即可;

(2) 取 BD 上一点 H , 作 $AH \perp BD$, 连接 PH , 利用三角形面积求出 AH , 利用射影定理证明 $PH \perp BD$, 从而得到二面角 $P-BD-A$ 的平面角 $\angle PHA$, 然后求角的正切值即可.

【小问 1 详解】

作 DC 中点 G , 连接 EG , PG , AG , AE ,

因为 E , G 为 BC , CD 中点, 则 EG 为 $\triangle BCD$ 中位线,

则 $EG \parallel BD$, $EG = \frac{1}{2}BD$, $BE = \frac{1}{2}AD$.

因为底面为长方形, 则 $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PE = \sqrt{AE^2 + PA^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$,

$$EG = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$AG = \sqrt{AD^2 + DG^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2},$$

因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PG = \sqrt{PA^2 + AG^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$,

因为 $\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$, 即 $PG^2 = PE^2 + EG^2$,

所以 $\triangle PEG$ 为直角三角形, 则 $PE \perp EG$,

因为 $EG \parallel BD$, 所以 $PE \perp BD$.

【小问 2 详解】

取 BD 上一点 H , 作 $AH \perp BD$, 连接 PH ,

因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PH \cap$ 底面 $ABCD = H$,

则 AH 为 PH 在底面 $ABCD$ 的射影,

因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $BD \subset$ 底面 $ABCD$,

所以 $PA \perp BD$,

又 $AH \perp BD$, $PA, AH \subset$ 面 PAH ,

所以 $BD \perp$ 面 PAH ,

因为 $PH \subset$ 面 PAH ,

所以 $PH \perp BD$,

又因为 $AH \subset$ 平面 ABD , $PH \subset$ 平面 PBD ,

所以二面角 $P-BD-A$ 的平面角为 $\angle PHA$,

又因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AH \subset$ 底面 $ABCD$,

所以 $PA \perp AH$, 所以 $\triangle PAH$ 为直角三角形.

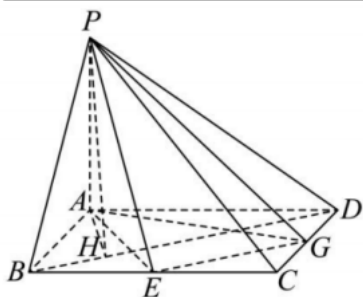
因为底面为长方形, 则 $\triangle BAD$ 为直角三角形,

$$\text{则 } S_{\triangle BAD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} BD \cdot AH = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{因为 } BD = \sqrt{3}, \text{ 则 } AH = \frac{2S_{\triangle BAD}}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{又因为 } PA = 1, \text{ 则 } \tan \angle PHA = \frac{PA}{AH} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

则二面角 $P-BD-A$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.



24. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $2S_n = n(a_{n+1} + 1)$, 且 $S_3 = 21$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{2S_n + n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = 3n + 1$

(2) $T_n = \frac{3n^2 + 5n}{12n^2 + 36n + 24}$

【解析】

【分析】(1) 利用 $2S_n = n(a_{n+1} + 1)$ 写出 $2S_{n-1} = (n-1)(a_n + 1)$, 两式相减化简, 在同除 $n(n+1)$, 化简等式累加, 得到等式两边同乘 n , 得到 $a_n = na_1 - n + 1$, 再由已知列方程组求出 a_1 , 即可求通项公式;

(2) 利用 (1) 求出 $\frac{1}{2S_n + n}$, 然后利用裂项相消求前 n 项和 T_n 即可.

【小问 1 详解】

因为 $2S_n = n(a_{n+1} + 1)$, 有 $2S_{n-1} = (n-1)(a_n + 1)$,

两式相减得 $2S_n - 2S_{n-1} = n(a_{n+1} + 1) - (n-1)(a_n + 1)$,

即 $2a_n = na_{n+1} + n - (n-1)a_n - n + 1$, 化简得 $(n+1)a_n = na_{n+1} + 1$,

等式两边同除以 $n(n+1)$, 得 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$,

化简得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$,

则有 $\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$, 且 $\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} (n \geq 2)$,

累加得 $\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} + \frac{a_{n-1}}{n-1} - \frac{a_{n-2}}{n-2} + \cdots + \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} - \frac{1}{1}$,

即 $\frac{a_n}{n} - \frac{a_1}{1} = \frac{1}{n} - 1$ 等式两边同乘 n , 则 $a_n - na_1 = 1 - n$, 即 $a_n = na_1 - n + 1$,

因为 $2S_n = n(a_{n+1} + 1)$, 且 $S_3 = 21$, 即 $a_1 + a_2 + a_3 = 21$,

所以 $2S_1 = a_2 + 1$, 即 $2a_1 = a_2 + 1$,

$2S_2 = 2(a_3 + 1)$, 即 $2(a_1 + a_2) = 2(a_3 + 1)$,

$$\text{则} \begin{cases} 2a_1 - a_2 - 1 = 0 \\ 2(a_1 + a_2) - 2(a_3 + 1) = 0, \text{ 解得 } a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10, \\ a_1 + a_2 + a_3 = 21 \end{cases}$$

$a_n = 4n - n + 1 = 3n + 1 (n \geq 2)$,

当 $n=1$ 时 $a_1 = 3 + 1 = 4$, 满足 $a_1 = 4$,

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n + 1$.

【小问 2 详解】

由 (1) 知 $a_n = 3n + 1$,

则 $a_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 4$,

则 $2S_n = n(a_{n+1} + 1) = n(3n + 4 + 1) = n(3n + 5)$;

$$\text{则 } \frac{1}{2S_n + n} = \frac{1}{n(3n+5)+n} = \frac{1}{3n^2+6n} = \frac{1}{3n(n+2)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\text{则 } T_n = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3n^2 + 5n}{12n^2 + 36n + 24}$$

25. 设 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = 3x^2 - ax + 3a - 5$

(1) 设函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = \frac{2\sqrt{15}}{3}$ 求 a 的值;

(2) 若 $f(x) < 0$ 对任意的 $a \in [-1, 1]$ 恒成立, 求实数 x 的取值范围.

【答案】(1) 0 或 36

$$(2) \left(-\frac{2}{3}, 1\right).$$

【解析】

【分析】(1) 设出点 A, B 的坐标, 利用韦达定理及两点间的距离公式列出方程即可得解.

(2) 将函数 $f(x)$ 转化为以 a 为自变量的函数 $g(a)$, 分类讨论 $g(a)$ 的单调性, 列出不等式即可得解.

【小问 1 详解】

由题意可设 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$,

则 x_1 与 x_2 是方程 $3x^2 - ax + 3a - 5 = 0$ 的两根,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{a}{3}, \quad x_1 x_2 = \frac{3a-5}{3},$$

$$\text{因为 } |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{3a-5}{3}},$$

$$\text{所以 } \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{3a-5}{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{9} - \frac{12a-20}{3} = \frac{20}{3},$$

整理得 $a(a-36) = 0$, 解得 $a = 0$ 或 $a = 36$

【小问 2 详解】

$$f(x) = 3x^2 - ax + 3a - 5 = 3x^2 + (3-x)a - 5,$$

令 $g(a) = (3-x)a + 3x^2 - 5$, 根据题意可知, 当 $a \in [-1, 1]$, $g(a) < 0$,

当 $3-x > 0$, 即 $x < 3$ 时, $g(a)$ 为增函数,

$$\text{所以 } g(1) < 0 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 < 0, \text{ 解得 } -\frac{2}{3} < x < 1,$$

当 $3-x < 0$, 即 $x > 3$ 时, $g(a)$ 为减函数, 所以 $g(-1) < 0 \Rightarrow 3x^2 + x - 8 < 0$, 解得

$$\frac{-1-\sqrt{97}}{6} < x < \frac{-1+\sqrt{97}}{6} \quad \text{又因为 } x > 3, \text{ 所以此时无解,}$$

当 $3-x = 0$, 即 $x = 3$ 时, $g(a) = 3 \times 3^2 - 5 = 22 > 0$, 此时不满足题意,

综上所述, $f(x) < 0$ 对任意的 $a \in [-1, 1]$ 恒成立, 实数 x 的取值范围为 $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$.

26. 设 $k \in \mathbb{R}$, 过定点 A 的动直线 $kx - y - 2k + 4 = 0$ 和过定点 B 的动直线 $x + ky = 0$ 相交于点 M

(1) 求定点 A, B 的坐标, 并求点 M 的轨迹方程;

(2) 求 $|MA| + \sqrt{3}|MB|$ 的最大值.

【答案】(1) $A(2,4)$, $B(0,0)$, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ ($x \neq 2$)

(2) $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 先利用直线定点的求法求得 A, B 的坐标, 再利用两直线垂直得到点 M 的轨迹为圆, 进而利用两点中点坐标公式与距离公式, 结合圆的标准方程即可得解;

(2) 利用 (1) 中结论, 结合三角换元与三角恒等变换、正弦函数的性质即可得解.

【小问 1 详解】

由 $kx - y - 2k + 4 = 0$ 可得 $k(x-2) = y-4$,

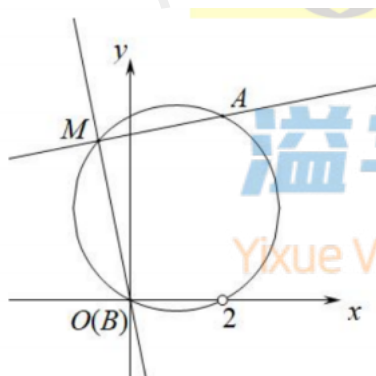
所以该线过定点 $A(2,4)$

由 $x + ky = 0$ 易知该直线过定点 $B(0,0)$,

又由直线 $kx - y - 2k + 4 = 0$ 与 $x + ky = 0$, 可知 $k \times 1 - 1 \times k = 0$,

所以两直线垂直, 又两直线相交于 M , 所以 $AM \perp BM$,

注意到直线 $x + ky = 0$ 不平行于 x 轴, 所以圆与 x 轴的另一个交点不存在,



则点 M 的轨迹为以线段 AB 为直径的圆 (挖掉一点),

则圆心为线段 AB 的中点, 即 $(1,2)$,

半径为 $\frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{5}$,

所以点 M 的轨迹方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ ($x \neq 2$)

【小问 2 详解】

因为 $AM \perp BM$,

所以 $|MA|^2 + |MB|^2 = |AB|^2 = (2-0)^2 + (4-0)^2 = 20$.

不妨设 $|MA| = 2\sqrt{5} \cos \theta, |MB| = 2\sqrt{5} \sin \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

$$\text{所以 } |MA| + \sqrt{3}|MB| = 2\sqrt{5} \cos \theta + \sqrt{3} \times 2\sqrt{5} \sin \theta = 4\sqrt{5} \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right)$$

$$= 4\sqrt{5} \left(\cos \theta \sin \frac{\pi}{6} + \sin \theta \cos \frac{\pi}{6} \right) = 4\sqrt{5} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) .$$

因为 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 所以 $\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi + \frac{\pi}{6}$,

则当 $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, $|MA| + \sqrt{3}|MB|$ 取得最大 $4\sqrt{5}$.

溢学职教升学通

Yixue Vocational Education for Promotion